

三層膜構造におけるグリーン関数

大阪大学大学院基礎工学研究科

井上 漱春

目次

1	前提: マクスウェル方程式	2
2	三層膜構造における Dyadic Green 関数 (縦横)	3
2.1	TE モードの Green 関数の導出	4
2.1.1	電場に関する波動方程式	4
2.1.2	$G_{2i}^{(TE)}$ について	7
2.2	TM モードの Green 関数の導出	9
2.2.1	磁場に関する波動方程式	9
2.2.2	$G_{2i}^{(TM)}$ について	12
2.3	三層膜構造における Dyadic Green 関数; まとめ	14
3	三層膜構造における Dyadic Green 関数 (縦)	15
3.1	TE モードの Green 関数 (縦) の導出	15
3.2	TM モードの Green 関数 (縦) の導出	17
3.3	三層膜構造における Dyadic Green 関数 (縦); まとめ	20
4	三層膜構造における Dyadic Green 関数 (横)	21

1 前提: マクスウェル方程式

SI 単位系のマクスウェル方程式は次式によって与えられる。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.4)$$

$\mathbf{E}, \mathbf{H}$ は電場 (単位 V/m) 及び磁場 (単位 A/m)、 $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ は電束密度 (単位 C/m^2) 及び磁場 (単位 Wb/m^2) である。

物質の分極を考慮すると、電束密度の定義として

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.6)$$

が成り立つ。この方程式は、真空中に存在する分極の空間分布 $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ が作る電磁場を記述する。

2 三層膜構造における Dyadic Green 関数 (縦横)

ここでは、図 1 のような 3 層構造を持つ誘電媒質について議論する。

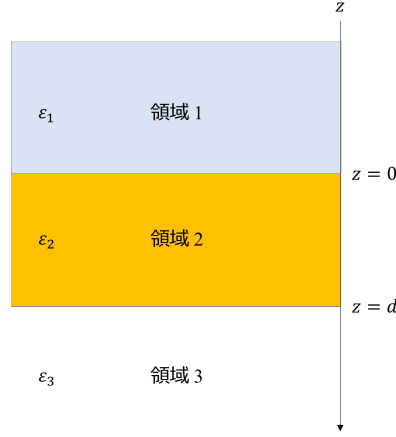


図 1: 3 層構造を持つ誘電媒質

領域 i での背景感受率を χ_i とすると、領域 i での比誘電率 ε_i 、光の波数 q_i 及び 面直波数 k_i は次のように表される。

$$\varepsilon_i = 1 + \chi_i \quad (2.1)$$

$$q_i = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_i} = \frac{\omega}{c} n_i \quad (2.2)$$

$$k_i = \sqrt{q_i^2 - k_{\parallel}^2} \quad (2.3)$$

2.1 TE モードの Green 関数の導出

2.1.1 電場に関する波動方程式

まず、電場に関する波動方程式を立ててみよう。(1.1) より、

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)]\end{aligned}\quad (2.4)$$

ここで、誘起分極 $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ を共鳴分極と非共鳴な分極に分けて考え、非共鳴分極は局所的かつ等方的な背景感受率を用いて表すことにする。3 層構造の場合、領域 $i (= 1, 2, 3)$ に埋め込まれた背景感受率 χ_i を用いて

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) = \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) + \mathbf{P}_{\text{nonres}}(\boldsymbol{\rho}, z) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}_{\text{nonres}}(\boldsymbol{\rho}, z) = \varepsilon_0 \chi_i \mathbf{E}_i(\boldsymbol{\rho}, z) \quad (2.6)$$

とすると、(1.3) は次のように表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_i(\boldsymbol{\rho}, z, t) = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} \quad (2.7)$$

この取り扱いにより、真空中のマクスウェル方程式は物質中のマクスウェル方程式へと移行する。さらに、(2.5), (2.6) を (2.4) に代入し整理すると、領域 i における電場 $\mathbf{E}_i$ は

$$\left[(\nabla \times \nabla \times) + \frac{1}{c^2} (1 + \chi_i) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{E}_i(\boldsymbol{\rho}, z, t) = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}, z, t) \quad (2.8)$$

となり、時間に関してフーリエ変換すると、次のように表される。

$$\left[(\nabla \times \nabla \times) - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_i) \right] \mathbf{E}_i(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) = \mu_0 \omega^2 \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) \quad (2.9)$$

ここで χ_i は z に依存する関数であることに注意する。また、

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \nabla \nabla - \nabla^2 \bar{I}_3\end{aligned}\quad (2.10)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
\left[\nabla \nabla - \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_i) \right) \bar{\mathcal{L}}_3 \right] \mathbf{E}_i(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) &= \mu_0 \omega^2 \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) \\
\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_i) \right] \mathbf{E}_i(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) &= -\mu_0 \omega^2 \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) - \nabla \left(\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} \right) \\
\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_i) \right] \mathbf{E}_i(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) &= -\mu_0 \omega^2 \left[\bar{\mathcal{L}}_3 + \frac{1}{q_i^2} \nabla \nabla \right] \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

となり、 $\mathbf{E}, \mathbf{P}$ を面内座標に関してフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k}_{\parallel} \left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_i) \right] \mathbf{E}_i(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} &= -\frac{\mu_0 \omega^2}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k}_{\parallel} \left[\bar{\mathcal{L}}_3 + \frac{1}{q_i^2} \nabla \nabla \right] \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\
\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i^2 \right] \mathbf{E}_i(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) &= -\mu_0 \omega^2 \left[\bar{\mathcal{L}}_3 + \frac{1}{q_i^2} \nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} \nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} \right] \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

となる。

$$\nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} \nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} = \begin{pmatrix} -k_{\parallel}^2 & 0 & ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

と書かれ、面内方向の対称性から、 $k_x = k_{\parallel}, k_y = 0$ としている点に注意してもらいたい。

(2.12) を電場の y 成分 (**TE モード**) に関してのみ考えると

$$\mathbf{E}_i^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{b,i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) + \mu_0 \omega^2 \int dz' G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) P_{y,\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

となる。この斉次解 $E_{b,i}^{(TE)}$ は、以下の式を満たす電場を表し、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i^2 \right] E_{b,i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = 0 \tag{2.15}$$

この Green 関数 $G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega)$ は以下の式を満たすものとして定義される。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i^2 \right] G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) = -\delta(z - z') \tag{2.16}$$

一旦境界条件を考えずに、直接誘起する場を求めることにする。(2.16) を z に関してフーリエ変換

$$G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\tilde{k} G(\mathbf{k}_{\parallel}, \tilde{k}, z', \omega) e^{i\tilde{k}z} \tag{2.17}$$

を行うことで

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i^2 \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\tilde{k} G(\mathbf{k}_{\parallel}, \tilde{k}, z', \omega) e^{i\tilde{k}z} &= \frac{-1}{2\pi} \int d\tilde{k} e^{i\tilde{k}(z-z')} \\ \left[-\tilde{k}^2 + k_i^2 \right] G(\mathbf{k}_{\parallel}, \tilde{k}, z', \omega) &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\tilde{k}z'} \end{aligned} \quad (2.18)$$

が得られる。逆変換によって、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) &= \frac{-1}{2\pi} \int d\tilde{k} \frac{e^{i\tilde{k}(z-z')}}{-\tilde{k}^2 + k_i^2} \\ &= \frac{-1}{4\pi k_i} \int d\tilde{k} e^{i\tilde{k}(z-z')} \left[\frac{1}{k_i + \tilde{k}} + \frac{1}{k_i - \tilde{k}} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

ここで物理的な要請を与える。Im $[k_i] > 0$ とし、Green 関数が無限遠で収束するようにすると、 $z - z' > 0$ の時、 $\tilde{k} = k_i$ が極となり、 $z - z' < 0$ の時、 $\tilde{k} = -k_i$ が極となる。これらの極は $\tilde{k}$ のガウス平面上の、第一象限、第三象限に位置することから、 $z - z' > 0$ の時、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) &= \frac{-1}{4\pi k_i} 2\pi i \text{Res} \left[k_i, e^{i\tilde{k}(z-z')} \left(\frac{1}{k_i + \tilde{k}} + \frac{1}{k_i - \tilde{k}} \right) \right] \\ &= \frac{i}{2k_i} e^{ik_i(z-z')} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$z - z' < 0$ の時、

$$\begin{aligned} G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) &= \frac{-1}{4\pi k_i} (-2\pi i) \text{Res} \left[-k_i, e^{i\tilde{k}(z-z')} \left(\frac{1}{k_i + \tilde{k}} + \frac{1}{k_i - \tilde{k}} \right) \right] \\ &= \frac{i}{2k_i} e^{-ik_i(z-z')} \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる。従って、(2.16) を満たす Green 関数は

$$G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) = \frac{i}{2k_i} e^{ik_i|z-z'|} \quad (2.22)$$

であり、対応するマクスウェル方程式 (2.14) は以下ようになる。

$$\mathbf{E}_i^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{b,i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) + \mu_0 \omega^2 \int dz' \frac{i}{2k_i} e^{ik_i|z-z'|} P_{y,\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

共鳴分極が領域 2 にのみ埋め込まれている場合、界面での反射を考えると、マクスウェルの境界条件から求まる $G_{2i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z')$ (後述) を用いて

$$\mathbf{E}_i^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{b,i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) + \mu_0 \omega^2 \int dz' G_{2i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') P_{y,\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

となる。さらに (2.24) の両辺に $\frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}}}{(2\pi)^2}$ をかけて 2 次元波数空間で積分すると、

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_i^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ E_{b,i}^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\mu_0 \omega^2}{(2\pi)^2} \iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} \int dz' G_{2i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} P_{y,\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ E_{b,i}^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu_0 \omega^2}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} G_{2i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} P_{y,\text{res}}(\boldsymbol{\rho}', z', \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{E}_{b,i}^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\mu_0 \omega^2}{q_i^2} \int d\mathbf{r}' \left[\iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_{2i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') \right] \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}', z', \omega) \\
&= \mathbf{E}_{b,i}^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \bar{G}_{2i}^{(TE)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \tag{2.25}
\end{aligned}$$

となり、TE モードに対する薄膜の Green 関数の表式

$$\bar{G}_{2i}^{(TE)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_{2i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') \tag{2.26}$$

を得る。

2.1.2 $G_{2i}^{(TE)}$ について

まず一番に注意すべき点は、この Green 関数は y 方向の電場 E_y (TE 電場) に対して定義されている点である。従って、この後登場する各種反射係数や透過係数は TE 電場に対して定義されたものを用いる必要がある点に注意する。領域 i から領域 j へ進む TE 電場に対して定義されたフレネルの反射及び透過係数 $t_{ij}^{(TE)}, r_{ij}^{(TE)}$ は

$$t_{ij}^{(TE)} = \frac{2k_i}{k_i + k_j} \tag{2.27}$$

$$r_{ij}^{(TE)} = \frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \tag{2.28}$$

であるから、これを用いる。

領域 2 にある源が領域 2 に誘起する場を求める Green 関数 $G_{22}^{(TE)}$ を求める。 $z = z_1$ 面での反射波の振幅 B 、 $z = z_2$ 面での反射波の振幅を C とすると、マクスウェルの境界条件から (2.23) 中の $e^{ik_2|z-z'|}$ は次のように書き直される。

$$e^{ik_2|z-z'|} + B e^{ik_2(z-z_1)} + C e^{-ik_2(z-z_2)} \tag{2.29}$$

$z = z_1, z = z_2$ 面での反射係数を $r_{21}^{(TE)}, r_{23}^{(TE)}$ とすると、振幅 B は下向きの波が界面で反射されたもの、振幅 C は上向きの波が界面で反射されたもの等しいため、

$$B = r_{21}^{(TE)} \left(e^{-ik_2(z_1-z')} + C e^{-ik_2(z_1-z_2)} \right) \quad (2.30)$$

$$C = r_{23}^{(TE)} \left(e^{ik_2(z_2-z')} + B e^{ik_2(z_2-z_1)} \right) \quad (2.31)$$

両辺を連立して解くことで、

$$B = \frac{r_{21}^{(TE)} e^{-ik_2(z_1-z')} + r_{23}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} e^{-ik_2(z_1-z_2)} e^{ik_2(z_2-z')}}{1 - r_{23}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} e^{2ik_2(z_2-z_1)}}$$

$$C = \frac{r_{23}^{(TE)} e^{ik_2(z_2-z')} + r_{23}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} e^{ik_2(z_2-z_1)} e^{-ik_2(z_1-z')}}{1 - r_{23}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} e^{2ik_2(z_2-z_1)}}$$

を得る。 $d_2 = z_2 - z_1$ として、多重反射の効果を関数 $M_2^{(TE)}$ を用いて、

$$M_2^{(TE)} = \left[1 - r_{23}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} e^{2ik_2(z_2-z_1)} \right]^{-1}$$

$$= \left[1 - r_{23}^{(TE)} r_{21}^{(TE)} e^{2ik_2 d_2} \right]^{-1}$$

とし、(2.29) に代入すると、

$$e^{ik_2|z-z'|} + r_{21}^{(TE)} \left\{ e^{-ik_2(z_1-z')} + r_{23}^{(TE)} e^{ik_2 d_2} e^{ik_2(z_2-z')} \right\} e^{ik_2(z-z_1)} M_2^{(TE)}$$

$$+ r_{23}^{(TE)} \left\{ e^{ik_2(z_2-z')} + r_{21}^{(TE)} e^{ik_2 d_2} e^{-ik_2(z_1-z')} \right\} e^{-ik_2(z-z_2)} M_2^{(TE)} \quad (2.32)$$

となる。

次に領域 2 にある源が領域 1 に誘起する場を求める Green 関数 $G_{12}^{(TE)}$ を求める。領域 2 にある源が誘起した $z = z_1$ で $-z$ 方向に向かう場の振幅 A_2^- は

$$A_2^- = e^{-ik_2 z_1} \left[e^{ik_2 z'} + r_{23}^{(TE)} e^{2ik_2 z_2} e^{-ik_2 z'} \right] M_2 \quad (2.33)$$

とかける。ここで、領域 2 から領域 1 へ進む TE 電場に対して定義されたフレネルの透過係数 $t_{21}^{(TE)}$ をかけることで、領域 1 に誘起する場

$$t_{21}^{(TE)} e^{-ik_2 z_1} \left[e^{ik_2 z'} + r_{23}^{(TE)} e^{2ik_2 z_2} e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{(TE)} e^{-ik_1(z-z_1)} \quad (2.34)$$

が得られる。同様にして、領域 3 に誘起する場は

$$t_{23}^{(TE)} e^{ik_2 z_2} \left[r_{21}^{(TE)} e^{-2ik_2 z_1} e^{ik_2 z'} + e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{(TE)} e^{ik_3(z-z_2)} \quad (2.35)$$

となる。

2.2 TM モードの Green 関数の導出

2.2.1 磁場に関する波動方程式

次に、磁場に関する波動方程式を立てよう。(1.2) より、

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \{\varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)\} \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \{\varepsilon_0 (1 + \chi_i) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, t)\} \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi_i) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, t) \right\} \\
\left[(\nabla \times \nabla \times) + \frac{1}{c^2} (1 + \chi_i) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, t) \tag{2.36}
\end{aligned}$$

時間に関してフーリエ変換し、整理すると

$$\begin{aligned}
\left[(\nabla \times \nabla \times) - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_i) \right] \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \\
\left[\nabla \nabla - \nabla^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_i) \right] \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \\
\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_i) \right] \mathbf{H}_i(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \tag{2.37}
\end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{H}, \mathbf{P}$ を面内座標に関するフーリエ変換を行うと、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k}_{\parallel} \left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} (1 + \chi_i) \right] \mathbf{H}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} &= \frac{i\omega}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k}_{\parallel} \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\
\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i(z)^2 \right] \mathbf{H}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) &= i\omega \nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) \tag{2.38}
\end{aligned}$$

ただし、 $\nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} = \begin{pmatrix} ik_{\parallel} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ である。(2.38) を磁場の y 成分 (TM モード) のみ考えると

$$\mathbf{H}_i^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{b,i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) - i\omega \int dz' G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

この斉次解 $H_{b,i}^{(TM)}$ は、以下の式を満たす磁場を表し、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i(z)^2 \right] H_b^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = 0 \tag{2.40}$$

この Green 関数 $G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega)$ は以下の式を満たすものとして定義されている。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_i^2 \right] G(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) = -\delta(z - z') \quad (2.41)$$

従って、電場の場合と同様に考えて、

$$\mathbf{H}_i^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{b,i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) - i\omega \int dz' \frac{i}{2k_i} e^{ik_i|z-z'|} \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

界面の効果を考えると、境界条件から求まる $G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z')$ (後述) を用いて

$$\mathbf{H}_i^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{b,i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) - i\omega \int dz' G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

と書ける。さらに、(2.43) の両辺に $\frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}}}{(2\pi)^2}$ をかけて 2 次元波数空間で積分すると、

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}_i^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ H_{b,i}^{(TM)}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) + \frac{-i\omega}{(2\pi)^2} \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} \int dz' G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ H_{b,i}^{(TM)}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) + \frac{-i\omega}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}', z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ H_{b,i}^{(TM)}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-i\omega}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z'} \\ 0 \\ -ik_{\parallel} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}', z', \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{H}_{b,i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-i\omega}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z'} \\ 0 \\ -ik_{\parallel} \end{pmatrix} G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \cdot \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}', z', \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.44)$$

ここで、

$$\nabla \times \mathbf{H}_i^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon_i \mathbf{E}_i^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \right\} \quad (2.45)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_{b,i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \left\{ \varepsilon_0 \varepsilon_i \mathbf{E}_{b,i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) \right\} \quad (2.46)$$

であるから、(2.44) の両辺の回転を取ると、

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_i^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{E}_{b,i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \left[\iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 \\ ik_{\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z'} \\ 0 \\ -ik_{\parallel} \end{pmatrix} G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') - \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \left[\iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} & 0 & ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(z - z') \right\} \right] \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \\
& \hspace{25em} (2.47)
\end{aligned}$$

となる。 $\frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} e^{ik_z |z - z'|}$ から来る特異点を取り除くことを考える。

$$\begin{aligned}
& \int_0^d dz' \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \frac{i}{2k_z} e^{ik_z |z - z'|} \\
&= \int_0^{z-\varepsilon} dz' \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \frac{i}{2k_z} e^{ik_z |z - z'|} + \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dz' \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \frac{i}{2k_z} e^{ik_z |z - z'|} + \int_{z+\varepsilon}^d dz' \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \frac{i}{2k_z} e^{ik_z |z - z'|} \\
&= \left[\int_0^{z-\varepsilon} dz' + \int_{z+\varepsilon}^d dz' \right] \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \frac{i}{2k_z} e^{ik_z |z - z'|} + \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dz' \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \frac{i}{2k_z} e^{ik_z |z - z'|} \\
&= \left[\int_0^{z-\varepsilon} dz' + \int_{z+\varepsilon}^d dz' \right] \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \frac{i}{2k_z} e^{ik_z |z - z'|} + \int_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} dz' \delta(z - z') \\
& \hspace{25em} (2.48)
\end{aligned}$$

こうすることで、 xx 成分のデルタ関数がキャンセルアウトされて

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}_i^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{E}_{b,i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \left[\iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} & 0 & ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(z - z') \right\} \right] \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \bar{G}_{2i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \\
& \hspace{25em} (2.49)
\end{aligned}$$

を得る。

こうして TM モードに対する薄膜の Green 関数の表式

$$\bar{G}_{2i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} & 0 & ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(z - z') \right\} \\
& \hspace{25em} (2.50)$$

を得る。

2.2.2 $G_{2i}^{(TM)}$ について

まず一番に注意すべき点は、この Green 関数は y 方向の磁場 H_y (TM 磁場) に対して定義されている点である。従って、この後登場する各種反射係数や透過係数は TM 磁場に対して定義されたものを用いる必要がある点に注意する。領域 i から領域 j へ進む TM 磁場に対して定義されたフレネルの反射及び透過係数 $t_{ij}^{(TE)}, r_{ij}^{(TE)}$ は

$$t_{ij}^{(TM)} = \frac{2\varepsilon_j k_i}{\varepsilon_j k_i + \varepsilon_i k_j} \quad (2.51)$$

$$r_{ij}^{(TM)} = \frac{\varepsilon_j k_i - \varepsilon_i k_j}{\varepsilon_j k_i + \varepsilon_i k_j} \quad (2.52)$$

であるから、これを用いる。

領域 2 にある源が領域 2 に誘起する場を求める Green 関数 $G_{22}^{(TM)}$ を求める。 $z = z_1$ 面での反射波の振幅 B 、 $z = z_2$ 面での反射波の振幅を C とすると、マクスウェルの境界条件から (2.42) 中の $e^{ik_2|z-z'|}$ は次のように書き直される。

$$e^{ik_2|z-z'|} + B e^{ik_2(z-z_1)} + C e^{-ik_2(z-z_2)} \quad (2.53)$$

$z = z_1, z = z_2$ 面での反射係数を $r_{21}^{(TM)}, r_{23}^{(TM)}$ とすると、振幅 B は下向きの波が界面で反射されたもの、振幅 C は上向きの波が界面で反射されたもの等しいため、

$$\begin{aligned} B &= r_{21}^{(TM)} \left(e^{-ik_2(z_1-z')} + C e^{-ik_2(z_1-z_2)} \right) \\ C &= r_{23}^{(TM)} \left(e^{ik_2(z_2-z')} + B e^{ik_2(z_2-z_1)} \right) \end{aligned}$$

両辺を連立して解くことで、

$$\begin{aligned} B &= \frac{r_{21}^{(TM)} e^{-ik_2(z_1-z')} + r_{23}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} e^{-ik_2(z_1-z_2)} e^{ik_2(z_2-z')}}{1 - r_{23}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} e^{2ik_2(z_2-z_1)}} \\ C &= \frac{r_{23}^{(TM)} e^{ik_2(z_2-z')} + r_{23}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} e^{ik_2(z_2-z_1)} e^{-ik_2(z_1-z')}}{1 - r_{23}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} e^{2ik_2(z_2-z_1)}} \end{aligned}$$

を得る。 $d_2 = z_2 - z_1$ として、多重反射の効果を関数 $M_2^{(TM)}$ を用いて、

$$\begin{aligned} M_2^{(TM)} &= \left[1 - r_{23}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} e^{2ik_2(z_2-z_1)} \right]^{-1} \\ &= \left[1 - r_{23}^{(TM)} r_{21}^{(TM)} e^{2ik_2 d_2} \right]^{-1} \end{aligned}$$

とし (2.53) に代入すると、

$$\begin{aligned} e^{ik_2|z-z'|} &+ r_{21}^{(TM)} \left\{ e^{-ik_2(z_1-z')} + r_{23}^{(TM)} e^{ik_2 d_2} e^{ik_2(z_2-z')} \right\} e^{ik_2(z-z_1)} M_2^{(TM)} \\ &+ r_{23}^{(TM)} \left\{ e^{ik_2(z_2-z')} + r_{21}^{(TM)} e^{ik_2 d_2} e^{-ik_2(z_1-z')} \right\} e^{-ik_2(z-z_2)} M_2^{(TM)} \end{aligned} \quad (2.54)$$

となる。

次に領域 2 にある源が領域 1 に誘起する場を求める Green 関数 $G_{12}^{(TM)}$ を求める。領域 2 にある源が誘起した $z = z_1$ で $-z$ 方向に向かう場の振幅 A_2^- は

$$A_2^- = e^{-ik_2 z_1} \left[e^{ik_2 z'} + r_{23}^{(TM)} e^{2ik_2 z_2} e^{-ik_2 z'} \right] M_2 \quad (2.55)$$

とかける。ここで、領域 2 から領域 1 へ進む TM 磁場に対して定義されたフレネルの透過係数 $t_{21}^{(TM)}$ をかけることで、領域 1 に誘起する場

$$t_{21}^{(TM)} e^{-ik_2 z_1} \left[e^{ik_2 z'} + r_{23}^{(TM)} e^{2ik_2 z_2} e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{(TM)} e^{-ik_1(z-z_1)} \quad (2.56)$$

が得られる。同様にして、領域 3 に誘起する場は

$$t_{23}^{(TM)} e^{ik_2 z_2} \left[r_{21}^{(TM)} e^{-2ik_2 z_1} e^{ik_2 z'} + e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{(TM)} e^{ik_3(z-z_2)} \quad (2.57)$$

となる。

2.3 三層膜構造における Dyadic Green 関数; まとめ

以上より、3 層構造における、縦横含んだマクスウェル方程式及び、Dyadic Green 関数は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_i^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_i^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) \quad (2.58)$$

$$\mathbf{E}_i^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{b,i}^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \bar{\mathcal{G}}_{2i}^{(TE)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \quad (2.59)$$

$$\mathbf{E}_i^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{b,i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \bar{\mathcal{G}}_{2i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \quad (2.60)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{2i}^{(TE)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_{2i}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') \quad (2.61)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{2i}^{(TM)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \iint d^2 \mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} & 0 & ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} G_{2i}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(z - z') \right\} \quad (2.62)$$

$$G_{21}^{(\xi)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') = \frac{i}{2k_2} \left[t_{21}^{\xi} e^{-ik_2 z_1} \left[e^{ik_2 z'} + r_{23}^{\xi} e^{2ik_2 z_2} e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{\xi} e^{-ik_1(z-z_1)} \right] \quad (2.63)$$

$$G_{22}^{(\xi)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') = \frac{i}{2k_2} \left[e^{ik_2|z-z'|} + r_{21}^{\xi} \left\{ e^{-ik_2(z_1-z')} + r_{23}^{\xi} e^{ik_2 d_2} e^{ik_2(z_2-z')} \right\} e^{ik_2(z-z_1)} M_2^{\xi} \right. \\ \left. + r_{23}^{\xi} \left\{ e^{ik_2(z_2-z')} + r_{21}^{\xi} e^{ik_2 d_2} e^{-ik_2(z_1-z')} \right\} e^{-ik_2(z-z_2)} M_2^{\xi} \right] \quad (2.64)$$

$$G_{23}^{(\xi)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') = \frac{i}{2k_2} \left[t_{23}^{\xi} e^{ik_2 z_2} \left[r_{21}^{\xi} e^{-2ik_2 z_1} e^{ik_2 z'} + e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{\xi} e^{ik_3(z-z_2)} \right] \quad (2.65)$$

$$t_{ij}^{(TE)} = \frac{2k_i}{k_i + k_j} \quad (2.66)$$

$$t_{ij}^{(TM)} = \frac{2\varepsilon_j k_i}{\varepsilon_j k_i + \varepsilon_i k_j} \quad (2.67)$$

$$r_{ij}^{(TE)} = \frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \quad (2.68)$$

$$r_{ij}^{(TM)} = \frac{\varepsilon_j k_i - \varepsilon_i k_j}{\varepsilon_j k_i + \varepsilon_i k_j} \quad (2.69)$$

$$M_2^{\xi} = \frac{1}{1 - r_{21}^{\xi} r_{23}^{\xi} e^{2ik_2(z_2-z_1)}} \quad (2.70)$$

この表式は CHEW の教科書と一致する。

3 三層膜構造における Dyadic Green 関数 (縦)

マクスウェルの縦電場を考える場合、(1.1) – (1.4) において、 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_L$ とすると縦場条件 $\nabla \times \mathbf{E}_L = 0$ から

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \quad (3.3)$$

となり、これが縦場のマクスウェル方程式である。

3.1 TE モードの Green 関数 (縦) の導出

まず、縦電場に関する波動方程式を立ててみよう。(3.2) の両辺に ∇ をかけると

$$\begin{aligned} \nabla \nabla (\varepsilon_0 \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)) &= \mathbf{0} \\ \nabla \nabla (\varepsilon_0 (1 + \chi_m) \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega)) &= \mathbf{0} \\ \nabla \nabla \mathbf{E}_L &= -\frac{1}{\varepsilon_i} \nabla \nabla \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \\ [\nabla^2 \mathbb{I}_3 + (\nabla \times \nabla \times)] \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{1}{\varepsilon_i} \nabla \nabla \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla^2 \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega) &= -\frac{1}{\varepsilon_i} \nabla \nabla \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \end{aligned} \quad (3.4)$$

となり、 $\mathbf{E}, \mathbf{P}$ を面内座標に関するフーリエ変換を行うと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k}_{\parallel} [\nabla^2] \mathbf{E}_L(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} &= -\frac{1}{\varepsilon_i} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k}_{\parallel} \nabla \nabla \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\ \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\parallel}^2 \right] \mathbf{E}_L(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) &= -\frac{1}{\varepsilon_i} \nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} \nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる。

$$\nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} \nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} = \begin{pmatrix} -k_{\parallel}^2 & 0 & ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

と書かれ、面内方向の対称性から、 $k_x = k_{\parallel}, k_y = 0$ としている点に注意してもらいたい。

(2.12) を電場の y 成分 (TE モード) に関してのみ考えると

$$\mathbf{E}_L^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \mathbf{E}_{L,b}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) \quad (3.7)$$

となる。 $\boldsymbol{E}_{\text{L,b}}^{(TE)}$ は次式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\parallel}^2 \right] \boldsymbol{E}_{\text{L,b}}^{(TE)}(\boldsymbol{k}_{\parallel}, z, \omega) = 0 \quad (3.8)$$

をみたす斉次解であり、誘起場は存在しない。従って誘起場の TE モードは縦成分を持たないという当たり前の結果が出てくる。

3.2 TM モードの Green 関数 (縦) の導出

次に、磁場に関する波動方程式を立てよう。(3.1) より、

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \{\varepsilon_0 \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)\} \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \{\varepsilon_0 (1 + \chi_i) \mathbf{E}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, t)\} \\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \{\nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, t)\} \\
(\nabla \times \nabla \times) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, t)
\end{aligned} \tag{3.9}$$

時間に関してフーリエ変換し、整理すると

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \\
(\nabla \nabla - \nabla^2) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \\
\nabla^2 \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) &= i\omega \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

となる。 $\mathbf{H}, \mathbf{P}$ を面内座標に関するフーリエ変換を行うと、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k}_{\parallel} [\nabla^2] \mathbf{H}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} &= \frac{i\omega}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k}_{\parallel} \nabla \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} \\
\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\parallel}^2 \right] \mathbf{H}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) &= i\omega \nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ただし、 $\nabla_{\mathbf{k}_{\parallel}} = \begin{pmatrix} ik_{\parallel} \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ である。(3.11) を磁場の y 成分 (TM モード) に関してのみ考えると

$$\mathbf{H}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) - i\omega \int dz' G_L(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

この斉次解 $H_{L,b}^{(TM)}$ は、以下の式を満たす電場を表し、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\parallel}^2 \right] H_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = 0 \tag{3.13}$$

この Green 関数 $G_L(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega)$ は以下の式を満たすものとして定義されている

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k_{\parallel}^2 \right] G_L(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z', \omega) = -\delta(z - z') \tag{3.14}$$

ので、

$$\mathbf{H}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) - i\omega \int dz' \frac{1}{2k_{\parallel}} e^{-k_{\parallel}|z-z'|} \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

と求められる。界面の効果 (鏡像効果?) を考えると、マクスウェルの境界条件から求まる $G_{L,\text{nm}}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z')$ (後述) を用いて

$$\mathbf{H}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) = \begin{pmatrix} 0 \\ H_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) - i\omega \int dz' G_{L,\text{nm}}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

と書ける。

さらに、(2.43) の両辺に $\frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}}}{(2\pi)^2}$ をかけて 2 次元波数空間で積分すると、

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}^{(TM)}(\boldsymbol{\rho}, z, \omega) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ H_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) + \frac{-i\omega}{(2\pi)^2} \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} \int dz' G_{L,\text{nm}}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\rho}} \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{k}_{\parallel}, z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ H_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) + \frac{-i\omega}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} G_{L,\text{nm}}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \{ \nabla'_{\mathbf{k}_{\parallel}} \times \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}', z', \omega) \}_y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ H_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, \omega) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-i\omega}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} G_{L,\text{nm}}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z'} \\ 0 \\ -ik_{\parallel} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}', z', \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{H}_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-i\omega}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{r}' \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z'} \\ 0 \\ -ik_{\parallel} \end{pmatrix} G_{L,\text{nm}}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')} \cdot \mathbf{P}_{\text{res}}(\boldsymbol{\rho}', z', \omega) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

ここで、

$$\nabla \times \mathbf{H}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \left\{ \varepsilon_i \mathbf{E}_L^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}, \omega) \right\} \quad (3.18)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \left\{ \varepsilon_i \mathbf{E}_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) \right\} \quad (3.19)$$

であるから、(2.44) の両辺の回転を取ると次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_L^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{E}_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) \\ &+ \frac{1}{\varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \left[\iint d^2\mathbf{k}_\parallel \frac{e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} & 0 & ik_\parallel \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -ik_\parallel \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & k_\parallel^2 \end{pmatrix} G_{L,nm}^{(TM)}(\mathbf{k}_\parallel, z, z') - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(z - z') \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

こうして TM モードに対する薄膜の縦場の Green 関数の表式

$$\bar{\mathcal{G}}_{L,\text{mem}}^{(TM)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \iint d^2\mathbf{k}_\parallel \frac{e^{i\mathbf{k}_\parallel \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} & 0 & ik_\parallel \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -ik_\parallel \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & k_\parallel^2 \end{pmatrix} G_{L,nm}^{(TM)}(\mathbf{k}_\parallel, z, z') - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(z - z') \right\} \quad (3.21)$$

を得る。

3.3 三層膜構造における Dyadic Green 関数 (縦); まとめ

以上より、3 層構造における縦場のマクスウェル方程式及び、Dyadic Green 関数は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}_L(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_L^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) \quad (3.22)$$

$$\mathbf{E}_L^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{\varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \bar{\mathcal{G}}_{L,\text{mem}}^{(TM)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \quad (3.23)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{L,\text{mem}}^{(TM)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} & 0 & ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} G_{L,nm}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(z - z') \right\} \quad (3.24)$$

$$G_{L,12}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') = \frac{1}{2k_{\parallel}} \left[t_{L,12}^{(TM)} e^{k_{\parallel} z_1} \left[e^{-k_{\parallel} z'} + r_{L,32}^{(TM)} e^{-2k_{\parallel} z_2} e^{k_{\parallel} z'} \right] M_{L,2}^{(TM)} e^{k_{\parallel} (z - z_1)} \right] \quad (3.25)$$

$$G_{L,22}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') = \frac{1}{2k_{\parallel}} \left[e^{-k_{\parallel} |z - z'|} + r_{L,12}^{(TM)} \left\{ e^{k_{\parallel} (z_1 - z')} + r_{L,32}^{(TM)} e^{-k_{\parallel} d_2} e^{-k_{\parallel} (z_2 - z')} \right\} e^{-k_{\parallel} (z - z_1)} M_{L,2}^{(TM)} \right. \\ \left. + r_{L,32}^{(TM)} \left\{ e^{-k_{\parallel} (z_2 - z')} + r_{L,12}^{(TM)} e^{-k_{\parallel} d_2} e^{k_{\parallel} (z_1 - z')} \right\} e^{k_{\parallel} (z - z_2)} M_{L,2}^{(TM)} \right] \quad (3.26)$$

$$G_{L,32}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') = \frac{1}{2k_{\parallel}} \left[t_{L,32}^{(TM)} e^{-k_{\parallel} z_2} \left[r_{L,12}^{(TM)} e^{2k_{\parallel} z_1} e^{-k_{\parallel} z'} + e^{k_{\parallel} z'} \right] M_{L,2}^{(TM)} e^{-k_{\parallel} (z - z_2)} \right] \quad (3.27)$$

$$t_{L,ij}^{(TM)} = \frac{2\varepsilon_i}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \quad (3.28)$$

$$r_{L,ij}^{(TM)} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_j}{\varepsilon_i + \varepsilon_j} \quad (3.29)$$

$$M_{L,2}^{\xi} = \frac{1}{1 - r_{L,12}^{(TM)} r_{L,32}^{(TM)} e^{2ik_z(z_2 - z_1)}} \quad (3.30)$$

縦横の Green 関数の $c \rightarrow \infty$ によって得られるものを縦場の Green 関数だと思っている。^{*1}

^{*1} マクスウェルの境界条件でどう出てくるか、要確認。

4 三層膜構造における Dyadic Green 関数 (横)

3 層構造における縦場のマクスウェル方程式及び, Dyadic Green 関数は次式で与えられる。

$$\mathbf{E}_T(\mathbf{r}, \omega) = \mathbf{E}_T^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{E}_T^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{E}^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{E}_L^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= \mathbf{E}_b^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{E}_{L,b}^{(TE)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{\varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \bar{\mathcal{G}}_{\text{mem}}^{(TE)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) &= \mathbf{E}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{E}_L^{(M)}(\mathbf{r}, \omega) \\ &= \mathbf{E}_b^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) - \mathbf{E}_{L,b}^{(TM)}(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{\varepsilon_i} \int d\mathbf{r}' \bar{\mathcal{G}}_{T,\text{mem}}^{(TM)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) \mathbf{P}_{\text{res}}(\mathbf{r}', \omega) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{\text{mem}}^{(TE)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G_{nm}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') \quad (4.4)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_{T,\text{mem}}^{(TM)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \iint d^2\mathbf{k}_{\parallel} \frac{e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')}}{(2\pi)^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} & 0 & ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 \\ -ik_{\parallel} \frac{\partial}{\partial z'} & 0 & k_{\parallel}^2 \end{pmatrix} G_{T,nm}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') \quad (4.5)$$

$$G_{12}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') = \frac{i}{2k_2} \left[t_{12}^{(TE)} e^{-ik_2 z_1} \left[e^{ik_2 z'} + r_{32}^{(TE)} e^{2ik_2 z_2} e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{(TE)} e^{-ik_1(z-z_1)} \right] \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} G_{22}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') &= \frac{i}{2k_2} \left[e^{ik_2|z-z'|} + r_{12}^{(TE)} \left\{ e^{-ik_2(z_1-z')} + r_{32}^{(TE)} e^{ik_2 d_2} e^{ik_2(z_2-z')} \right\} e^{ik_2(z-z_1)} M_2^{(TE)} \right. \\ &\quad \left. + r_{32}^{(TE)} \left\{ e^{ik_2(z_2-z')} + r_{12}^{(TE)} e^{ik_2 d_2} e^{-ik_2(z_1-z')} \right\} e^{-ik_2(z-z_2)} M_2^{(TE)} \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$G_{32}^{(TE)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') = \frac{i}{2k_2} \left[t_{3,2}^{(TE)} e^{ik_2 z_2} \left[r_{12}^{(TE)} e^{-2ik_2 z_1} e^{ik_2 z'} + e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{(TE)} e^{ik_3(z-z_2)} \right] \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
G_{T,12}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') &= \frac{i}{2k_2} \left[t_{12}^{(TM)} e^{-ik_2 z_1} \left[e^{ik_2 z'} + r_{32}^{(TM)} e^{2ik_2 z_2} e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{(TM)} e^{-ik_1(z-z_1)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2k_{\parallel}} \left[t_{L,12}^{(TM)} e^{k_{\parallel} z_1} \left[e^{-k_{\parallel} z'} + r_{L,32}^{(TM)} e^{-2k_{\parallel} z_2} e^{k_{\parallel} z'} \right] M_{L,2}^{(TM)} e^{k_{\parallel}(z-z_1)} \right]
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
G_{T,22}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') &= \frac{i}{2k_2} \left[e^{ik_2|z-z'|} + r_{12}^{(TM)} \left\{ e^{-ik_2(z_1-z')} + r_{32}^{(TM)} e^{ik_2 d_2} e^{ik_2(z_2-z')} \right\} e^{ik_2(z-z_1)} M_2^{(TM)} \right. \\
&\quad \left. + r_{32}^{(TM)} \left\{ e^{ik_2(z_2-z')} + r_{12}^{(TM)} e^{ik_2 d_2} e^{-ik_2(z_1-z')} \right\} e^{-ik_2(z-z_2)} M_2^{(TM)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2k_{\parallel}} \left[e^{-k_{\parallel}|z-z'|} + r_{L,12}^{(TM)} \left\{ e^{k_{\parallel}(z_1-z')} + r_{L,32}^{(TM)} e^{-k_{\parallel} d_2} e^{-k_{\parallel}(z_2-z')} \right\} e^{-k_{\parallel}(z-z_1)} M_{L,2}^{(TM)} \right. \\
&\quad \left. + r_{L,32}^{(TM)} \left\{ e^{-k_{\parallel}(z_2-z')} + r_{L,12}^{(TM)} e^{-k_{\parallel} d_2} e^{k_{\parallel}(z_1-z')} \right\} e^{k_{\parallel}(z-z_2)} M_{L,2}^{(TM)} \right]
\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
G_{T,32}^{(TM)}(\mathbf{k}_{\parallel}, z, z') &= \frac{i}{2k_2} \left[t_{3,2}^{(TM)} e^{ik_2 z_2} \left[r_{12}^{(TM)} e^{-2ik_2 z_1} e^{ik_2 z'} + e^{-ik_2 z'} \right] M_2^{(TM)} e^{ik_3(z-z_2)} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2k_{\parallel}} \left[t_{L,32}^{(TM)} e^{-k_{\parallel} z_2} \left[r_{L,12}^{(TM)} e^{2k_{\parallel} z_1} e^{-k_{\parallel} z'} + e^{k_{\parallel} z'} \right] M_{L,2}^{(TM)} e^{-k_{\parallel}(z-z_2)} \right]
\end{aligned} \tag{4.11}$$